

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Ιούνιος 2012

ΛΥΣΕΙΣ

Ονοματεπώνυμο..... Α.Μ.....

Θέμα 1ο Προσεγγίστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{x(y-4)}{2+x+y},$$

Στην αρχή των συντεταγμένων με ένα πολυώνυμο $p(x, y)$ τρίτου βαθμού ως προς τις μεταβλητές. Στη συνέχεια εξετάστε αν το $p(x, y)$ παρουσιάζει άκρες τιμές.

Λύση :

$$p(x, y) = \frac{x(y-4)}{2} \left[1 - \frac{x+y}{2} \right]$$

Ελάχιστο στο σημείο $P(-2/3, 10/3)$.

Θέμα 2ο Φυσικό μέγεθος Q εξαρτάται από τις μεταβλητές p, s, T και δίνεται από τη συνάρτηση

$$Q(p, s, T) = \frac{ps - \ln(1 + \cos^2 T)}{1 + ps^2}$$

Ζητείται να βρεθεί η σχετική μεταβολή του φυσικού μεγέθους Q , όταν έχουμε μεταβολές $\Delta p, \Delta s$ και ΔT στις μεταβλητές p, s, T .

Λύση :

$$\frac{df}{f} = \frac{3ps(1+ps)dT + [sdp + (2+ps)pds]T}{ps(1+ps)T}$$

Θέμα 3ο Να εξετασθεί η ύπαρξη ή όχι των ορίων

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^2}{(x+y^2)^2} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}.$$

Λύση : Στην πρώτη, με αντικατάσταση $x = my^2$, αποδεικνύεται εύκολα ότι δεν υπάρχει όριο.

Στην δεύτερη υπάρχει όριο. Αυτό αποδεικνύεται είτε μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες είτε με βάση τον ορισμό του ορίου. Η λύση με πολικές είναι απλή. Με τον ορισμό θεωρούμε σημείο (x, y) στην περιοχή του $(0, 0)$, που σημαίνει ότι $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Άρα έχουμε $|x|, |y| < \delta$, η οποία οδηγεί στα εξής

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3 \frac{x^2}{x^2+y^2} |y| < 3\delta.$$

Επομένως, θέτοντας $\delta = \varepsilon/3$, καταλήγουμε στην

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| < \varepsilon,$$

η οποία ισχύει για κάθε ε (οσοδήποτε μικρό). Άρα το ζητούμενο όριο είναι μηδέν.

Θέμα 4ο Θεωρούμε ρευστό πυκνότητας $\rho = \rho(t, x, y, z)$ το οποίο κινείται σε βαρυτικό δυναμικό $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$. Έστω ένα τυχαίο σωματίδιο του ρευστού, με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) και ταχύτητα $\vec{u} = \vec{u}(t, x, y, z)$. Έστω επίσης ότι $H = (\nabla \cdot \vec{u})/3$ είναι η μέση απόκλιση της ταχύτητας του ρευστού. Να αποδείξετε ότι τα ολικά διαφορικά, ως προς τον χρόνο, των H και $\vec{u}$ γράφονται

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u},$$

αντίστοιχα (υπενθυμίζεται ότι $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = u_x \partial/\partial x + u_y \partial/\partial y + u_z \partial/\partial z$). Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2$$

και κάνοντας χρήση των εξισώσεων Euler και Poisson ,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi \quad \text{και} \quad \nabla^2\Phi = \rho,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\frac{dH}{dt} = -H^2 - \frac{1}{3}\rho.$$

Λύση: Ξεκινώντας από το ολικό διαφορικό της ταχύτητας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}. \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})H.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας την $H = (\nabla \cdot \vec{u})/3$ στην παραπάνω σχέση και κάνοντας χρήση της βοηθητικής ταυτότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{3} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Με αντιμετάθεση των μερικών παραγώγων έχουμε $\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})/\partial t = \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{u}/\partial t)$, οπότε

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{3} \left\{ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] - \frac{1}{3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left[\nabla \cdot \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right) - 3H^2 \right]. \end{aligned}$$

Τέλος, με τη βοήθεια των εξισώσεων Euler και Poisson , καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\frac{1}{3}\nabla^2\Phi - H^2 \\ &= -H^2 - \frac{1}{3}\rho.\end{aligned}$$

Θέμα 5ο Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας

$$x^2 + y^2 - 3y - yz - 6z + z^2 = -5$$

που βρίσκονται πλησιέστερα και μακρύτερα από το επίπεδο Oxy .

Λύση: $f(x, y, z) = z + \lambda(x^2 + y^2 - 3y + yz - 6z + z^2 + 5)$

$$f_x = 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$f_y = \lambda(2y - 3 + z) = 0 \quad (2)$$

$$f_z = 1 + \lambda(y - 6 + 2z) = 0 \quad (3)$$

$$f_\lambda = (x^2 + y^2 - 3y + yz - 6z + z^2 + 5) = 0 \quad (4)$$

Από την εξίσωση 1 έχουμε $x = 0$ ή $\lambda = 0$ και από τη 2 $\lambda = 0$ ή $z = 3 - 2y$. Για $\lambda \neq 0, x = 0, z = 3 - 2y$ αντικαθιστούμε στην 4 θα έχουμε μετά τις πράξεις $3y^2 = 4$ άρα $y = \pm 2/\sqrt{3}, z = 3 \pm 4/\sqrt{3}, x = 0$. Το πλησιέστερο σημείο θα είναι $N(0, 2/\sqrt{3}, 3 - 4/\sqrt{3})$ και το πιο απομακρυσμένο $F = (0, -2/\sqrt{3}, 3 + 4/\sqrt{3})$.

Θέμα 6ο Έστω οι επιφάνειες με εξισώσεις: $f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ και $f_2 = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$.

α) Να υπολογισθεί η γωνία θ που σχηματίζει η τομή τους στο σημείο $P(2, -1, 2)$

β) Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f_3 = x^2 + y^2$ κατά την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης C που σχηματίζει η τομή των δύο επιπέδων στο σημείο P .

Λύση:

α) Υπολογίζουμε τις κλίσεις ∇f_1 και ∇f_2 στο σημείο P και στη συνέχεια

$$\cos \vartheta = \frac{(\nabla f_1) \cdot (\nabla f_2)}{|\nabla f_1||\nabla f_2|} = \frac{8}{3\sqrt{21}} \Rightarrow \vartheta \simeq 54,4$$

β) Η εφαπτομένη στη καμπύλη C στο σημείο P θα έχει διεύθυνση

$$\begin{aligned}\vec{n}_3 &= \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \text{ όταν το} \\ \vec{n}_1 &= \frac{\nabla f_1}{|\nabla f_1|} \text{ και } \vec{n}_2 = \frac{\nabla f_2}{|\nabla f_2|}\end{aligned}$$

Άρα $D_{\vec{n}_3} f_3 = (\nabla f_3) \cdot \vec{n}_3$